UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
PREPARADURIA DE MATEMATICAS
MATEMATICAS 5 (MA-2112) VIERNES 24-02-2012
Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

1.- Determine la integral de trayectoria de la función, $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ para $\sigma(t) = \binom{e^t}{e^{-t}}$ sobre el intervalo $0 \leq t \leq 2$.

SOLUCION.

Es una integral de trayectoria ya que $f: R^2 \rightarrow R$. Entonces tenemos:

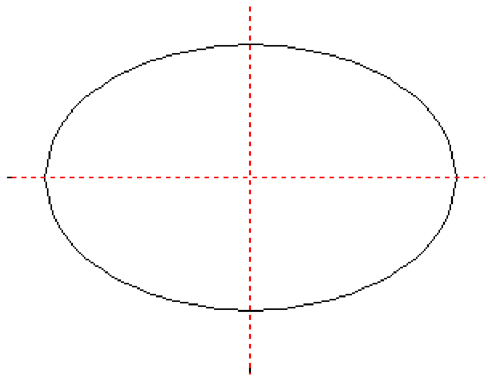
$$\sigma'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \;;\; \|\sigma'(t)\| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}} \;\; y \;\; f(\sigma(t)) = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}$$

Por definición de integral de trayectoria.

$$\int_0^2 f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|dt = \int_0^2 (e^{2t} + e^{-2t})dt = \left(\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2}\right)_0^2 = \frac{e^4 - e^{-4}}{2}$$

2.- Sea la curva descrita por $4x^2 + y^2 = 1$, halle la integral de $f(x,y) = x^3 y$

SOLUCION.



Parametrizamos la trayectoria usando trigonometría, se tiene que:

$$(2x)^2 + (y)^2 = 1$$

Sea entonces $2x = \cos(\theta)\,; y = \sin(\theta)$

Tenemos que $\sigma(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\theta)}{2} \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$

Es una integral de trayectoria, ya que $f: R^2 \rightarrow R$, con $\theta \in [0,2\pi]$.

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(\theta)^3}{8}\sin(\theta)\right)\sqrt{\frac{(\sin(\theta))^2}{4} + (\cos(\theta))^2 d\theta}$$

Cambio de variable $u = \cos(\theta)$; $du = -\sin(\theta)\,d\theta$: $\theta = 0 \rightarrow u = 1 \;\; \theta = 2\pi \rightarrow u = 1$

$$\int_1^1 \left(\frac{u^3}{8}\right)\sqrt{\frac{1-u^2}{4} + u^2(-du)} = 0$$

3.- Sea la función definida por, y la trayectoria descrita por, en el intervalo $0 \leq t \leq 1$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}; \quad \sigma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

SOLUCION.

Es una integral de línea ya que $f: R^2 \to R^2$, entonces por definición se tiene

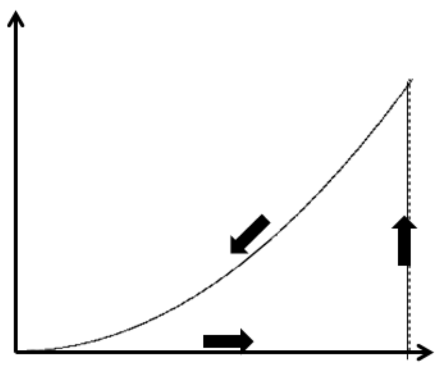
$$\int_0^1 \langle f(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt = \int_0^1 \langle \begin{pmatrix} 3t^4 \\ t^2 - 9t^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6t \end{pmatrix} \rangle \, dt = \int_0^1 (3t^4 + 6t^3 - 54t^5) dt$$

$$I = \frac{3}{5} + \frac{3}{2} - 9$$

4.- Dada la trayectoria $c \nearrow$, tal que $c = \{(x,y) : y = x^2 \; ; \; 0 \leq x \leq 1\}$, calcular

$$\int_{c\nearrow} x^2ydx + yxdy$$

Con sentido establecido por la gráfica.



SOLUCION.

Debemos separar la trayectoria como la unión de tres más. Entonces tenemos

Trayectoria C_1.

$$\sigma_1(t) = \begin{pmatrix} x = t \\ y = t^2 \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Luego,

$$\int_{C_1\nearrow} \langle F, ds \rangle = \int_0^1 \langle \begin{pmatrix} t^4 \\ t^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \rangle \, dt = \int_0^1 3t^4 dt = \frac{3}{5}$$

Observación, la parametrizacion de C_1 va en contra al sentido dado luego

$$\int_{C_1 \nearrow} \langle F, ds \rangle = -\frac{3}{5}$$

Trayectoria C_2.

$$\sigma_2(t) = \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = t \end{pmatrix} \quad 0 \le t \le 1$$

Luego

$$\int_{C_2 \nearrow} \langle F, ds \rangle = \int_0^1 \langle \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \, dt = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}$$

Trayectoria C_3,

$$\sigma_3(t) = \begin{pmatrix} x = t \\ y = 0 \end{pmatrix} \; ; \quad 0 \le t \le 1$$

Luego

$$\int_{C_3 \nearrow} \langle F, ds \rangle = \int_0^1 \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \, dt = \int_0^1 0 \, dt = 0$$

Se cumple que, $C \nearrow = C_1 \nearrow \cup C_2 \nearrow \cup C_3 \nearrow$

$$\int_{C \nearrow} \langle F, ds \rangle = \int_{C_1 \nearrow} \langle F, ds \rangle + \int_{C_2 \nearrow} \langle F, ds \rangle \int_{C_3 \nearrow} \langle F, ds \rangle \;\; => \int_{C \nearrow} \langle F, ds \rangle = -\frac{1}{10}$$

5.- Sea $C =$ arco de elipse de ecuación $3x^2 + 4y^2 = 48$ que va de $\binom{2}{3}$ a $\binom{-4}{0}$ seguido del segmento de recta que va de $\binom{-4}{0}$ a $\binom{2}{0}$, y posterior el segmento de recta que va de $\binom{2}{0}$ a $\binom{2}{3}$ calcular.

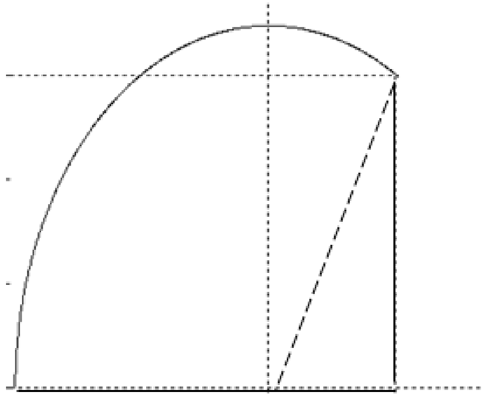
$$\int_{C \nearrow} \left(1 + \frac{4}{3}x\right) y^2 dx + 2xydy$$

SOLUCION.

Sea la función de dos variables definida por

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{4}{3}x\right) y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

Y la curva de la forma



Note que el ángulo de apertura al punto (2,3) viene dado por el cambio de variable donde

$$\text{Donde; } x = 4\cos(\theta) \;=>\; x = 2 \;=>\; \frac{1}{2} = \cos(\theta) \quad y = 2\sqrt{3}\sin(\theta) \;=>\; y = 3 \;=>\; \frac{3}{2\sqrt{3}} = \sin(\theta)$$

Parametrizamos la curvas, para C_1

$$C_1 = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{48} + \dfrac{4y^2}{48} = 1 \;=>\; \left(\dfrac{x}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 1 \\ \text{Y sea } \cos(\theta) = \dfrac{x}{4}\;;\; \sin(\theta) = \dfrac{y}{2\sqrt{3}} \quad \text{con } \theta \in (\theta_0, \pi) \end{cases}$$

Se tiene entonces

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 4\cos(\theta) \\ 2\sqrt{3}\sin(\theta) \end{pmatrix} \;=>\; \sigma'_1 = \begin{pmatrix} -4\sin(\theta) \\ 2\sqrt{3}\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Se resuelva la primera integral

$$I_{c1} = \int_{\theta_0}^{\pi} \left\langle \begin{pmatrix} (1 + \frac{4}{3}(4\cos(\theta))(12\sin^2(\theta) \\ 2(4\cos(\theta))(2\sqrt{3}\sin(\theta)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4\sin(\theta) \\ 2\sqrt{3}\cos(\theta) \end{pmatrix} \right\rangle d\theta$$

$$I_{c1} = \int_{\theta_0}^{\pi} \left(-48\left(1 + \frac{16}{3}\cos(\theta)\right)(\sin^3(\theta)) + 96(\sin(\theta))(\cos^2(\theta)) \right) d\theta$$

Integramos

$$I_{c1} = 48\cos(\theta)\sin^2(\theta) - 64\sin^4(\theta)_{\theta_0}^{\pi} = 64\,(\sin(\theta_0))^4 - 48\cos(\theta_0)\,(\sin(\theta_0))^2$$

$$I_{c1} = 64\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 - 48\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \;=>\; I_{c1} = 18$$

Para C_2

$$C_2 = \begin{cases} y = 0 \\ -4 \le x \le 2 \end{cases} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;=>\; I_{C2} = \int_{-4}^{2} 0\,dx = 0$$

Para C_3

$$C_3 = \begin{cases} x = 2 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases} \;;\; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \; t \in (0,2) \;=>\; \sigma'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;;\; F = \begin{pmatrix} \frac{11}{3}t^2 \\ 4t \end{pmatrix}$$

$$I_{C3} = \int_0^3 \langle \begin{pmatrix} \frac{11}{3}t^2 \\ 4t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \, dt \;=\; \int_0^3 4t dt = 2t^2 {}_0^3 \;= 18$$

Por lo cual se tiene $I = I_{C1} + I_{c2} + I_{C3} \;\; => \;\; I = 36$

6.- Sea

$$C = \{(x,y) \mid x = -1, -1 \le y \le 0\} \;\cup \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 1, \quad -1 \le x \le 0 \; y \ge 0\}$$

y de C denota el recorrido desde el punto (-1,-1) hasta (0,1) calcule

$$\int_{C\uparrow} \left(-y\,dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy \right)$$

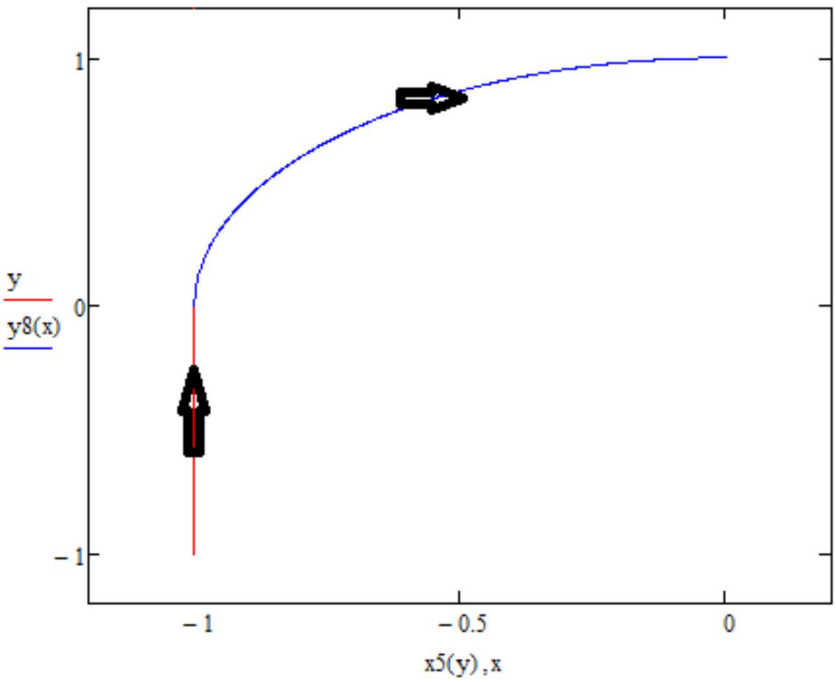
Solución.

Sea la región S descrita por $\quad x5(y) := -1 \qquad -1 \le y \le 0$

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad -1 \le x \le 0 \qquad y \ge 0$$

Graficamos la región.

$$y8(x) := \sqrt{1 - x^2}$$



No se puede usar Green por que no es cerrada, ni tampoco seria recomendado hacerlo. Entonces parametrizamos las dos trayectorias.

C1 $\left|\begin{array}{l} x = -1 \\ -1 \le y \le 0 \end{array}\right.$ $\sigma(t) := \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ $-1 \le t \le 0$ $\frac{d}{dt}\sigma(t) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ahora de la integral sabemos que: $F(x,y) := \begin{pmatrix} -y \\ \dfrac{y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$

Evaluamos F en la parametrizacion $F(t) := \begin{pmatrix} -t \\ \dfrac{t}{1 + t^2} \end{pmatrix}$ y realizamos el producto interno con la derivada de la parametrizacion.

$F(t)\cdot\frac{d}{dt}\sigma(t) \rightarrow \frac{t}{t^2 + 1}$ por lo cual ahora realizamos la integral.

$$\int_{-1}^{0} \frac{t}{t^2 + 1}\, dt \rightarrow -\frac{\ln(2)}{2}$$

C2 $\left|\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ -1 \le x \le 0 \end{array}\right.$ $\sigma(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ $\pi \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ $\frac{d}{d\alpha}\sigma(\alpha) \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Evaluamos F en la parametrizacion. $F(\alpha) := \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

Producto interno. $F(\alpha)\cdot\frac{d}{d\alpha}\sigma(\alpha) = \sin(\alpha)^2 + \sin(\alpha)\cos(\alpha)$

Ahora la integral. $$\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha)^2 + \sin(\alpha)\cos(\alpha)\, d\alpha \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

Se verifica los sentidos de la parametrizacion y el dado por el problema son iguales.

La respuesta será la suma de los resultados.

$$RESP := \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$$

7.- Dados $F(x,y): R^2 \to R^2$ el campo vectorial definido por

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ e^{x+y} \end{pmatrix}$$

Y $\sigma: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R^2$ la trayectoria definida por

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos^7(t) \\ \sin^7(t) \end{pmatrix}$$

Calcule la integral de línea $\int_\sigma Fds$.

Solución.

Probemos si la función, F es conservativa, por lo que deberemos buscar una función que cumpla la condición

$$\nabla f = F \quad => \quad f(x,y) = e^{x+y} \quad : \quad \nabla f = \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ e^{x+y} \end{pmatrix} = F$$

Por lo que por campo conservativo se cumple que

$$\int_\sigma Fds = \int_\sigma \nabla f ds = f(\sigma(0)) - f\left(\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Donde: $\sigma(0) = (1,0) \quad \sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$

$$\int_\sigma Fds = f(1,0) - f(1,0) \quad => \quad \int_\sigma Fds = e - e \quad => \quad \int_\sigma Fds = 0$$

8.- Conociendo que

$$F(x,y,z) = (e^x \cos(y) + yz\, , xz - e^x \sin(y)\, , xy + z)$$

Calcule

$$\int_C Fds$$

Donde c es un trayectoria cualquiera que va desde el punto (1,0,0) al (0,3,3)

Solución.

Demuestre que la función es $f(x,y,z) = e^x \cos(y) + xyz + \frac{z^2}{2}$

$$\int_C Fds = \cos(3) + \frac{9}{2} - e$$